

# DER WIDERSPENSTIGEN ZÄHMUNG - EIN AUSBLICK AUF DIE MÖGLICHKEITEN UNIVERSELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Carsten Elsner, Martin Stein

Mathematische Semesterberichte 58 (2011), 157-183;  
DOI 10.1007/s00591-011-0089-7

1981 gab L.A.Rubel eine algebraische Differentialgleichung explizit an, mit deren  $C^\infty(\mathbb{R})$ -Lösungen jede über der reellen Achse definierte stetige Funktion gleichmäßig approximiert werden kann. Angeregt durch dieses Ergebnis von Rubel konstruierte M.Boshernitzan fünf Jahre später Funktionenfamilien bestehend aus *analytischen Funktionen* mit jeweils vier Parametern, die im Raum  $C(I)$  der stetigen Funktionen über einem beliebigen kompakten Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  dicht liegen und zugleich ein und derselben algebraischen Differentialgleichung genügen. Schließlich konnten im Jahr 2000 M.Laczkovich und I.Z.Ruzsa eine Vermutung von Rubel beweisen, nach der jede stetige Funktion über der ganzen reellen Achse durch die analytischen Lösungen einer einzigen universellen Differentialgleichung approximiert werden kann. In unserem Beitrag untersuchen wir, inwieweit die Lösungen von Rubels algebraischer Differentialgleichung auf der einen Seite und die analytischen Funktionenfamilien von Boshernitzan sowie M.Laczkovich und I.Z.Ruzsa auf der anderen Seite geeignet sind, die sogenannten Weierstrassmonster zu zähmen, d.h. die überall stetigen, aber nirgends differenzierbaren Funktionen durch die glatten Lösungen der jeweiligen universellen Differentialgleichungen konstruktiv zu approximieren. Hierdurch geben wir einen Einblick in die grundlegenden Konzepte der universellen Differentialgleichungen.

PETRUCHIO: *He that knows better how to tame a shrew,  
Now let him speak - 'tis charity to show.*  
W.Shakespeare, Act IV, Scene I

*MR 2010 Subject Classification:* 34A34, 34C11, 34K05, 28A80

*Key words:* Universelle Gleichungen, Approximation durch analytische Funktionen, Algebraische Differentialgleichungen, Weierstrass-Monster